# RICHIAMI SUI LOGARITMI

Libro di 3° pag. 257 (per INF) e 296 (per TLC)

Il logaritmo in base B di un numero N è l'esponente E da dare alla base per ottenere il numero.

$$\boxed{\log_B N = E}$$

BASE NUMERO ESPONENTE

"E" È L'ESPONENTE DA DARE A "B" PER AVERE "N"

$$\boxed{B^E = N}$$

ESPONENTE

BASE NUMERO

ATTENZIONE!

$\boxed{N > 0}$

NON È POSSIBILE FARE IL LOGARITMO DI NUMERI NEGATIVI

ESEMPI:

1) $\log_2 4 = ?$ A CHE POTENZA VA ELEVATO IL 2 PER AVERE 4? RISPOSTA = 2 $(2^2=4)$ $\rightarrow \log_2 4 = 2$

2) $\log_{10} 1000 = ?$ A CHE POTENZA VA ELEVATO IL 10 PER AVERE 1000? RISPOSTA = 3 $(10^3=1000)$ $\rightarrow \log_{10} 1000 = 3$

Nel mondo elettrico si usano solo due basi:

1) $\boxed{\text{base} = 10}$

In questo caso si scrive solo 'log' non occorre scrivere la base, resta sottintesa.

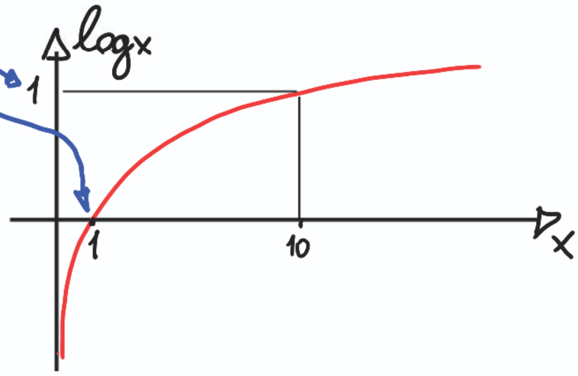
ESEMPI:

$\log 100 = 2$ $\quad \log 10 = 1$ $\quad \log 1 = 0$

IL LOGARITMO DELLA BASE VALE SEMPRE 1

IL LOGARITMO DI 1 VALE SEMPRE 0

GRAFICO DI $y = \log x$




Il logaritmo $\log N = E$ è l'inverso

dell'esponenziale $10^E = N$

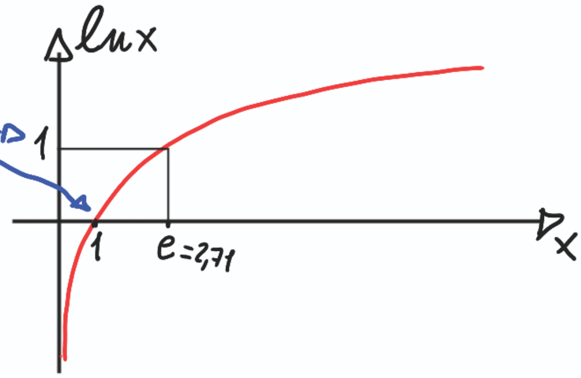
2) $\boxed{\text{base} = e}$

'*e*' si chiama "numero di Nepero", è una costante con proprietà molto particolari (come pi greco) e vale 2,718. In questo caso invece che 'log' si scrive 'ln' che sta per "logaritmo naturale".

GRAFICO DI $y = \ln x$

ESEMPI:

$\ln 100 = 4{,}6$ $\quad \ln e = 1$ $\quad \ln 1 = 0$




Il logaritmo naturale $\ln N = E$

è l'inverso dell'esponenziale $e^E = N$

Il logaritmo è usato moltissimo per varie ragioni:

1) Permette di rappresentare facilmente numeri molto piccoli e molto grandi. In particolare per le potenze di 10 succede che:

ESEMPI: $\log \underbrace{10^0}_{1} = 0$ $\quad \log 10^3 = 3$ $\quad \log 10^{12} = 12$ $\quad \log 10^{-6} = -6$

Questo è molto utile nel mondo elettrico in cui i segnali variano molto di intensità.

2) Il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale. Questo permette anche di risolvere le equazioni logaritmiche:

ESEMPIO: $3 = \log x$ QUAL È IL NUMERO IL CUI LOGARITMO VALE 3?

BASTA ELEVARE TUTTO AL VALORE DELLA BASE, SAPENDO CHE $\boxed{\cancel{B}^{\cancel{\log_B} x} = x}$

SI ANNULLANO, RESTA SOLO X

$3 = \log x \longrightarrow 10^3 = 10^{\cancel{\log} x} \longrightarrow \boxed{10^3 = x}$

3) il logaritmo gode di varie proprietà (ved. sotto)

## PROPRIETÀ DEI LOGARITMI (solo le più utili)

Sono scritte per 'log' ma valgono anche per 'ln'.

1) Il logaritmo trasforma i prodotti in somme:

$$\boxed{\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)}$$

ESEMPI:

$$\log(3 \cdot 4) = \log 3 + \log 4$$

$$\log 2 + \log 3 = \log(2 \cdot 3)$$

$$\ln(2e) = \ln 2 + \ln e = \ln 2 + 1$$

$$\log(2+3) = \cancel{\log 2 \cdot \log 3}$$

RESTA COSÌ

NO! ⚠ SULLE SOMME NON SI APPLICANO PROPRIETÀ

2) Il logaritmo trasforma rapporti in sottrazioni:

$$\boxed{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$$

ESEMPI:

$$\log\left(4/3\right) = \log 4 - \log 3$$

$$\log 2 - \log 5 = \log\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\ln\left(\frac{e}{10}\right) = \ln e - \ln 10 = 1 - \ln 10$$

$$\log(6-4) = \cancel{\log 6 - \log 4}$$ NO!

SULLE SOTTRAZIONI NON SI APPLICANO PROPRIETÁ

RESTA COSÍ

3) Il logaritmo trasforma gli esponenti in fattori

$$\boxed{\log a^{b} = b \cdot \log a}$$

ESEMPI:

$$\log(10^2) = 2 \log 10 = 2$$

$$\log(4^{-6}) = -6 \cdot \log 4$$

$$\ln(e^{10}) = 10 \ln e = 10$$

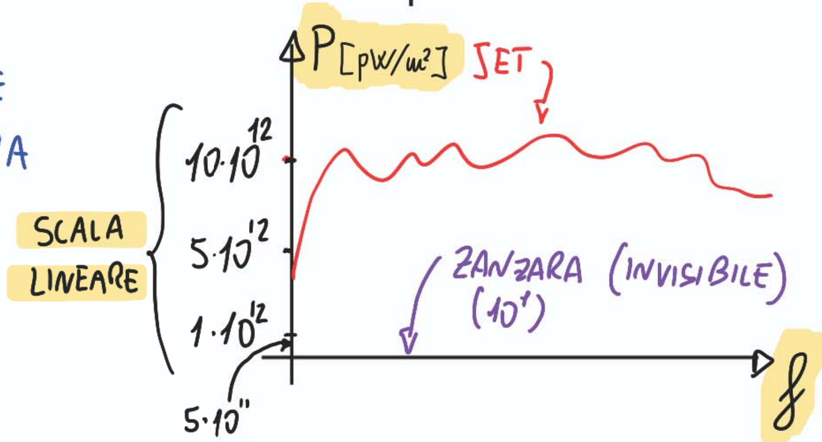
$$\ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

$$-2 \log(5) = \log 5^{-2}$$

# I DECIBEL (dB)

Spesso è necessario confrontare numeri molto grandi con numeri molto piccoli. Ad esempio l'orecchio umano può percepire il suono di una zanzara che è circa mille miliardi di volte meno intenso della partenza di un jet. Anche nelle linee di trasmissione è normale avere segnali con ampiezza milioni di volte superiore ad altri.
Se i segnali venissero graficati con scala lineare, quelli poco intensi scomparirebbero totalmente e sarebbero visibili solo quelli molto intensi.

ESEMPIO DI RAPPRESENTAZIONE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA DELLA POTENZA DELL'ONDA SONORA DEL JET E DELLA ZANZARA




Si è deciso quindi di adottare unità di tipo logaritmico, che hanno la proprietà di "amplificare" i numeri piccoli e "comprimere" i numeri grandi, in modo tale da renderli tutti visibili su un grafico. Queste prendono il nome di "unità di trasmissione" o "decibel" e sono le seguenti.

## 1) DECIBEL PER LE POTENZE

Il decibel nasce per confrontare due potenze ed è definito così:

$$\boxed{X = 10\cdot\log\left(\frac{P_a}{P_b}\right) dB}$$

UNITÀ DI MISURA "decibel"

RAPPORTO TRA LE DUE POTENZE IN dB ("X" PRENDERÀ ALTRI NOMI IN BASE ALL'UTILIZZO)

FATTORE MOLTIPLICATIVO

POTENZA DEL SEGNALE a

POTENZA DEL SEGNALE b

Perché si mette il fattore 10?

Perché in realtà l'unità di misura originaria sono i "Bel" ( in onore di Alexander Graham Bell che all'epoca brevettò il telefono, anche se il primo inventore fu Antonio Meucci).

UNITÁ DI MISURA "Bel"

Il Bel è quindi definito come: $X = \log\left(P_a / P_b\right)\ B$ ma non viene praticamente mai usato perché i numeri che vengono fuori sono troppo piccoli e si preferisce moltiplicarli per 10, quindi l'unità di misura diventa "decibel" [dB]. È un po'come se decidessimo di misurare le lunghezze in decimetri anziché in metri.

ESEMPIO:

1) POTENZA SUONO ZANZARA $P_b = 3 \cdot 10^{-12}\ W/m^2$

POTENZA SUONO JET $P_a = 6\ W/m^2$

$$X = 10 \log\left(\frac{6}{3 \cdot 10^{-12}}\right) = 10 \log\left(2 \cdot 10^{12}\right) = 10\left[\log 2 + \log 10^{12}\right] =$$

$$= 10\left[0{,}3 + 12 \cdot \log 10\right] = 10\left[0{,}3 + 12\right] = \boxed{123\ dB}$$

2) DECIBEL PER LE ALTRE GRANDEZZE (tensioni, correnti, pressioni, ecc)

Si può usare il dB anche per grandezze diverse dalle potenze.

La formula diventa la seguente:

$$\boxed{Y = 20 \cdot \log\left(\frac{V_a}{V_b}\right) dB}$$

UNITÁ DI MISURA "decibel"

TENSIONE DEL SEGNALE a

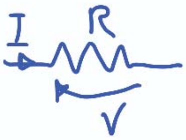
RAPPORTO TRA LE DUE TENSIONI IN dB ("Y" POI PRENDERÁ ALTRI NOMI IN BASE ALL'UTILIZZO)

TENSIONE DEL SEGNALE b

FATTORE MOLTIPLICATIVO

Perché il 10 è diventato 20??

Si può vedere facilmente applicando la legge di Ohm ad un resistore.




$$\begin{cases} P = V \cdot I \\ I = V/R \end{cases} \rightarrow P = \frac{V^2}{R} \rightarrow X = 10 \log \frac{P_a}{P_b} = 10 \log \frac{V_a^2/\cancel{R}}{V_b^2/\cancel{R}} =$$

$$= 10 \log \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^2 = \boxed{20 \log \frac{V_a}{V_b}}$$

ESEMPIO:

TENSIONE SEGNALE UTILE = 5 V

TENSIONE INTERFERENZA = 2 mV

$$Y = 20 \log \left(\frac{5}{2 \cdot 10^{-3}}\right) = 20 \log \left(2{,}5 \cdot 10^3\right) = 20 \left[\log 2{,}5 + 3\right] =$$

$$= 20 \cdot \left[0{,}4 + 3\right] = \boxed{68\,dB}$$

## 3) DECIBEL PER MISURE ASSOLUTE ( dBm , dBμV , ecc )

Il decibel è SEMPRE il confronto tra due grandezze.

È possibile esprimere un numero assoluto?

È possibile esprimere un numero assoluto con un espediente: lo si confronta sempre con un valore fisso di riferimento. In questo caso si mette come riferimento un valore molto piccolo e nell'unità di misura bisogna riportarne il prefisso.

ESEMPI:

1) SI VUOLE ESPRIMERE $P_a = 4\ W$ IN dB

SI PRENDE COME RIFEMENTO $\boxed{P_b = 1\,mW}$

$$P_{a\,dBm} = 10 \log \left(\frac{4\ W}{1\ mW}\right) = 10 \log \left(\frac{4}{10^{-3}}\right) = 10 \log \left(4 \cdot 10^3\right) = \boxed{36\,dB_{mW}}$$

"X" È DIVENTATO "$P_{a\,dBm}$" PERCHÉ STIAMO ESPRIMENDO LA POTENZA $P_a$ IN dBm

IMPORTANTE!

I $dB_{mW}$ SONO MOLTO USATI E SI ABBREVIANO ANCHE IN $\boxed{dBm}$

2) SI VUOLE ESPRIMERE $V_a = 7\,mV$

SI PRENDE COME RIFERIMENTO $\boxed{V_b = 1\,\mu V}$

"Y" È DIVENTATO "$V_{a_{dB\mu V}}$" PERCHÉ STIAMO ESPRIMENDO LA TENSIONE $V_a$ IN $dB_{\mu V}$

$$V_{a_{dB\mu V}} = 20 \log\left(\frac{7 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}}\right) = 20 \log\left(7 \cdot 10^{3}\right) = \boxed{77\, dB\mu V}$$

3) AVENDO IL VALORE $P = 40\, dBm$ COME SI FA A SAPERE IL NUMERO IN WATT? FORMULA INVERSA

$$40\, dBm = 10 \log\left(\frac{P}{10^{-3}}\right)$$

$10^{-3} \rightarrow 1\,mW$

$$\frac{40}{10} = \log P - \log 10^{-3}$$

$$4 = \log P + 3 \underbrace{\log 10}_{=1}$$

$$4 = \log P + 3$$

$$\log P = 4 - 3$$

$$\log P = 1$$

PER FARE L'INVERSA SI ELEVA TUTTO A $10^x$ $\rightarrow$ $\cancel{10}^{\cancel{\log} P} = 10^1$

$$\boxed{P = 10\, W}$$

# UTILIZZO PRATICO DEI dB SENZA CALCOLATRICE

Usare i dB è facile anche senza calcolatrice.
Bisogna avere bene le proprieta dei logaritmi e anche che:

1) $\boxed{+0\,dB = \text{POTENZA} \times 1 \text{ (INVARIATA)}}$

DIMOSTRAZIONE:

$$10\log\frac{P_a}{P_b}=0 \rightarrow \log P_a - \log P_b = 0 \rightarrow \log P_a = \log P_b \rightarrow \cancel{10}^{\cancel{\log} P_a} = \cancel{10}^{\cancel{\log} P_b} \rightarrow \boxed{P_a = P_b}$$

2) $\boxed{+3\,dB = \text{POTENZA} \times 2}$ (CIRCA)

$\boxed{-3\,dB = \text{POTENZA}/2}$

DIMOSTRAZIONE:

$$10\log\frac{P_a}{P_b}=3 \rightarrow \log\frac{P_a}{P_b}=0{,}3 \rightarrow \cancel{10}^{\cancel{\log}\frac{P_a}{P_b}} = 10^{0{,}3} \rightarrow \frac{P_a}{P_b}=1{,}995 \rightarrow \boxed{P_a \simeq 2\cdot P_b}$$

3) $\boxed{+7\,dB = \text{POTENZA} \times 5}$ (CIRCA)

$\boxed{-7\,dB = \text{POTENZA}/5}$

DIMOSTRAZIONE:

$$10\log\frac{P_a}{P_b}=7 \rightarrow \log\frac{P_a}{P_b}=0{,}7 \rightarrow \cancel{10}^{\cancel{\log}\frac{P_a}{P_b}} = 10^{0{,}7} \rightarrow \frac{P_a}{P_b}=5{,}012 \rightarrow \boxed{P_a \simeq 5\cdot P_b}$$

4) $\boxed{+10\,dB = \text{POTENZA} \times 10}$

$\boxed{-10\,dB = \text{POTENZA}/10}$

DIMOSTRAZIONE:

$$10\log\frac{P_a}{P_b}=10 \rightarrow \log\frac{P_a}{P_b}=1 \rightarrow \cancel{10}^{\cancel{\log}\frac{P_a}{P_b}} = 10^{1} \rightarrow \frac{P_a}{P_b}=10 \rightarrow \boxed{P_a \simeq 10\cdot P_b}$$

Quasi tutti gli altri valori possono essere ricavati da questi sopra.

ESEMPIO 1: UN AMPLIFICATORE HA UN GUADAGNO PARI A 27 dB (CIOÈ AMPLIFICA IL SEGNALE DI 27 dB), DI QUANTO AUMENTA LA POTENZA DEI SEGNALI CHE LO ATTRAVERSANO?

$P_{IN}$ — $\boxed{27\,dB}$ — $P_{OUT}$

$$27\,dB = \underbrace{(10+10+7)\,dB}_{\text{LO SCOMPONGO IN SOMME}} = \underbrace{10\cdot 10\cdot 5}_{\text{LA SOMMA DI dB DIVENTA PRODOTTO DI NUMERI}} = 500 \text{ VOLTE} \rightarrow \boxed{P_{OUT} = 500\,P_{IN}}$$

ESEMPIO 2: UN CAVO ATTENUA IL SEGNALE DI 13 dB, DI QUANTO SI RIDUCE LA POTENZA DEI SEGNALI CHE LO ATTRAVERSANO?

$P_{IN}$ — $\boxed{-13dB}$ — $P_{OUT}$

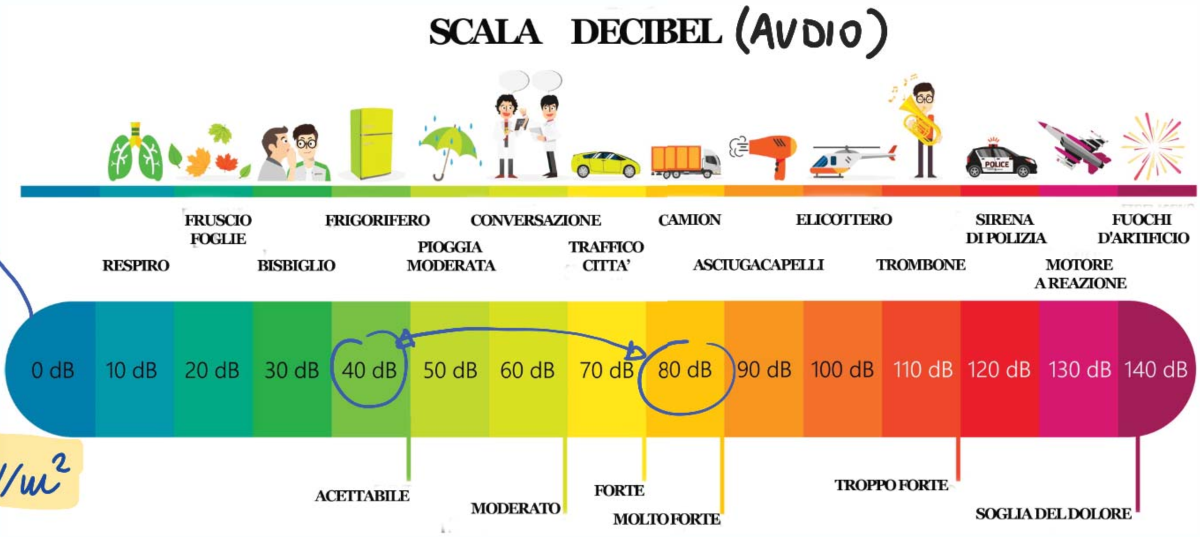
$$-13\,dB = \underbrace{(-10-3)dB}_{\text{LO SCOMPONGO IN SOMME}} = \underbrace{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{LA SOMMA DI dB DIVENTA PRODOTTO DI NUMERI}} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \rightarrow \boxed{P_{OUT} = 0{,}05\,P_{IN}}$$

ESEMPIO 3: IL RUMORE DI UNA PERSONA CHE PARLA VALE 50dB. SE LE PERSONE A PARLARE SONO 2, LA POTENZA SONORA RADDOPPIA. DI QUANTO AUMENTANO I dB?

$$\frac{P_2}{P_1} = 2 \rightarrow +3dB \quad \text{QUINDI} \quad (50+3)dB = \boxed{53\,dB}$$

ESEMPIO 4: NELLA STESSA CONDIZIONE DELL'ESERCIZIO 3, SE LE PERSONE A PARLARE FOSSERO 50?

$$\frac{P_2}{P_1} = 50 = \underbrace{5\cdot 10}_{\text{SI SCOMPONE IL NUMERO IN PRODOTTI}} = \underbrace{(7+10)dB}_{\text{IL PRODOTTO DI NUMERI DIVENTA SOMMA DI dB}} = 17dB \quad \text{QUINDI} \quad (50+17)dB = 67dB$$




0dB É LA SOGLIA DI UDIBILITÁ PARI A $10^{-12}\,W/m^2$

ESEMPIO 6: IL RAPPORTO SEGNALE/RUMORE SULL'ADSL DI PINO VALE 85 dB. QUANTO É PIÚ POTENTE IL SEGNALE RISPETTO AL RUMORE?

$$\frac{S}{N} = 65\,dB = 10+10+10+10+10+10+5 =$$

$$= 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 7 = \boxed{7\cdot 10^6 \text{ VOLTE}}$$

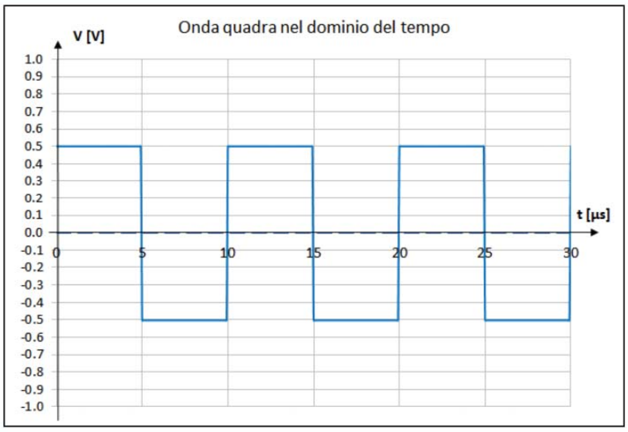
# DIAGRAMMI LOGARITMICI

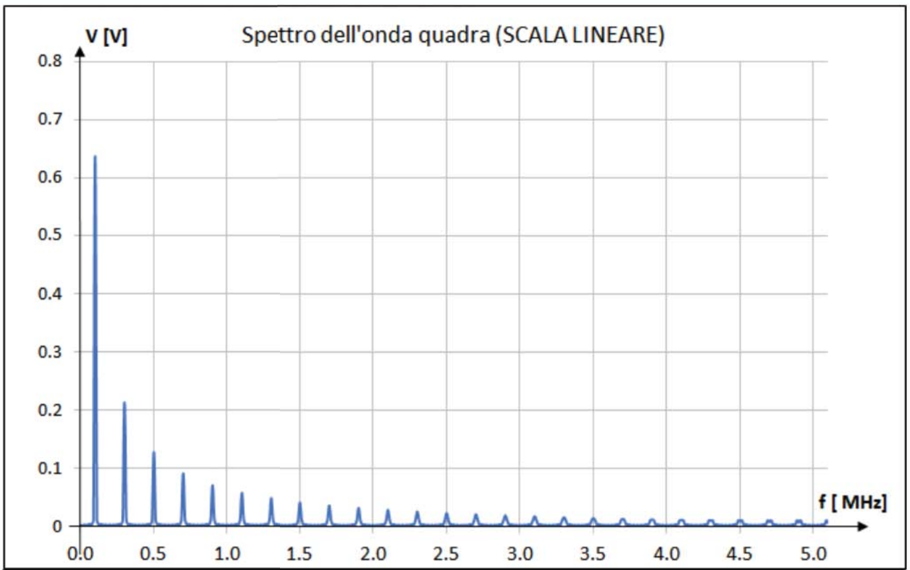
Il logaritmo ed il dB sono molto usati per creare grafici in grado di visualizzare insieme grandezze molto piccole e molto grandi. Esitono varie possibilità per utilizzare la scala logaritmica.

## 1) Ascisse lineari, ordinate logaritmiche

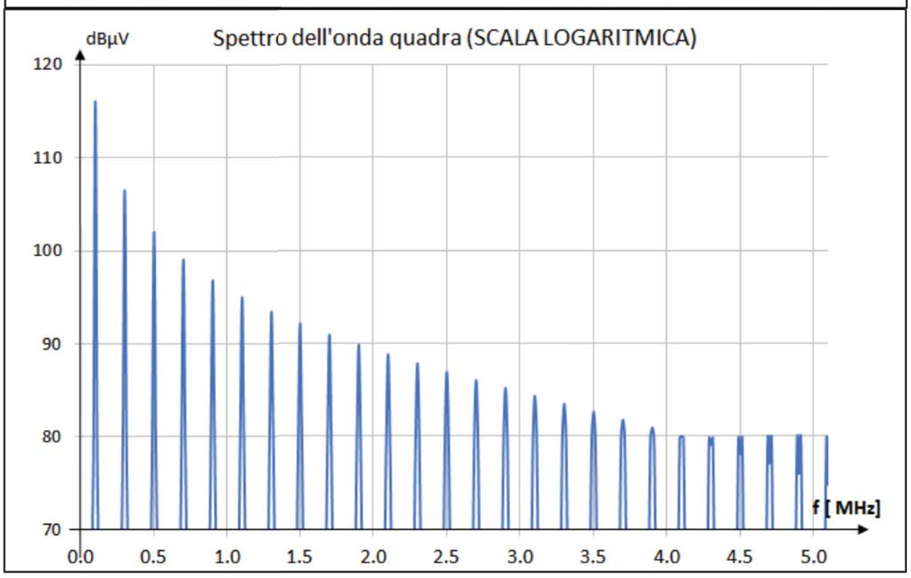
La prima possibilità è di mantenere lineare l'asse X e di utilizzare i dB sull'asse Y.

Esempio: forma d'onda e spettro di un'onda quadra.



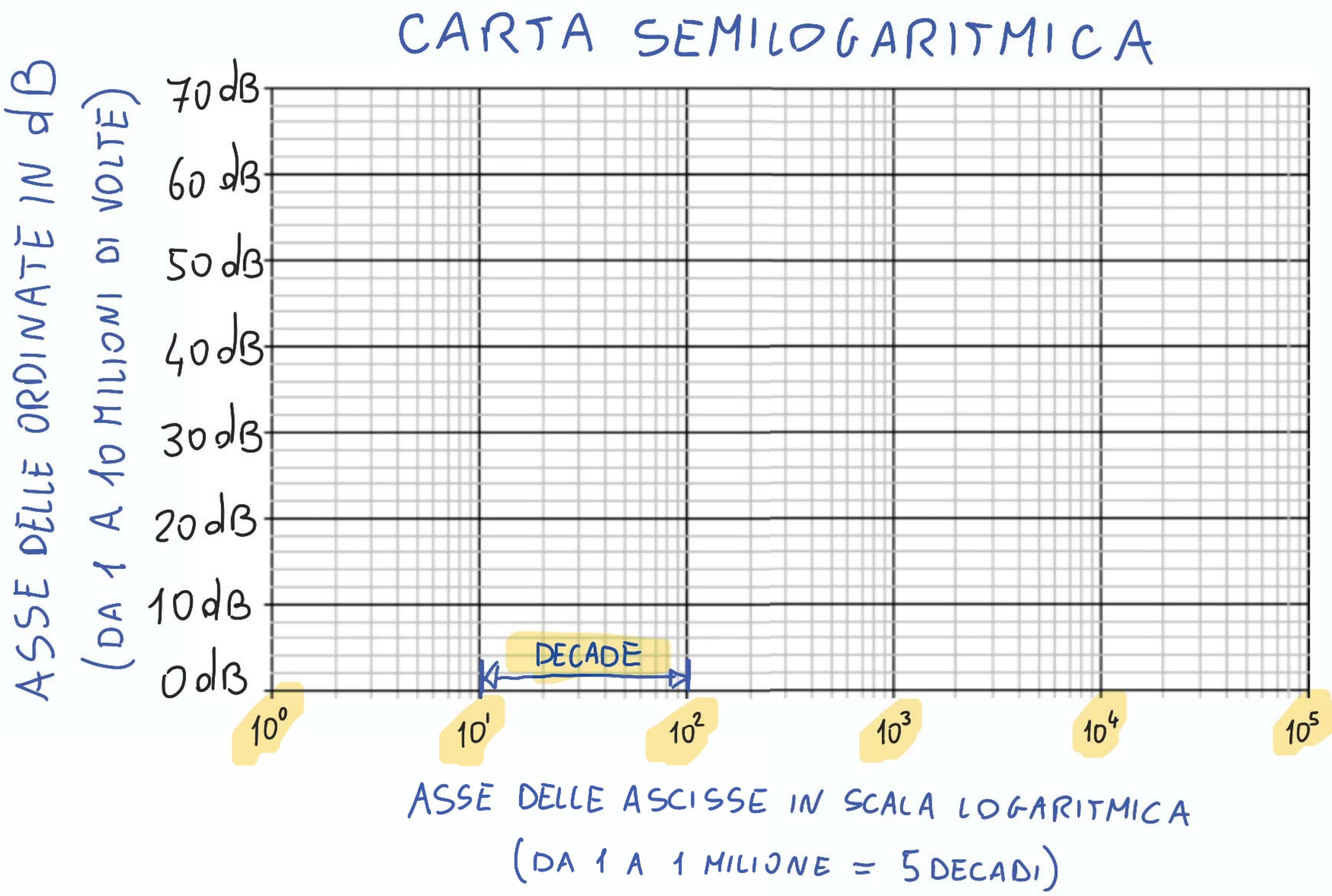

La rappresentazione in scala logaritmica permette di determinare facilmente l'ampiezza delle armoniche superiori che in scala lineare sono troppo piccole per essere misurate.



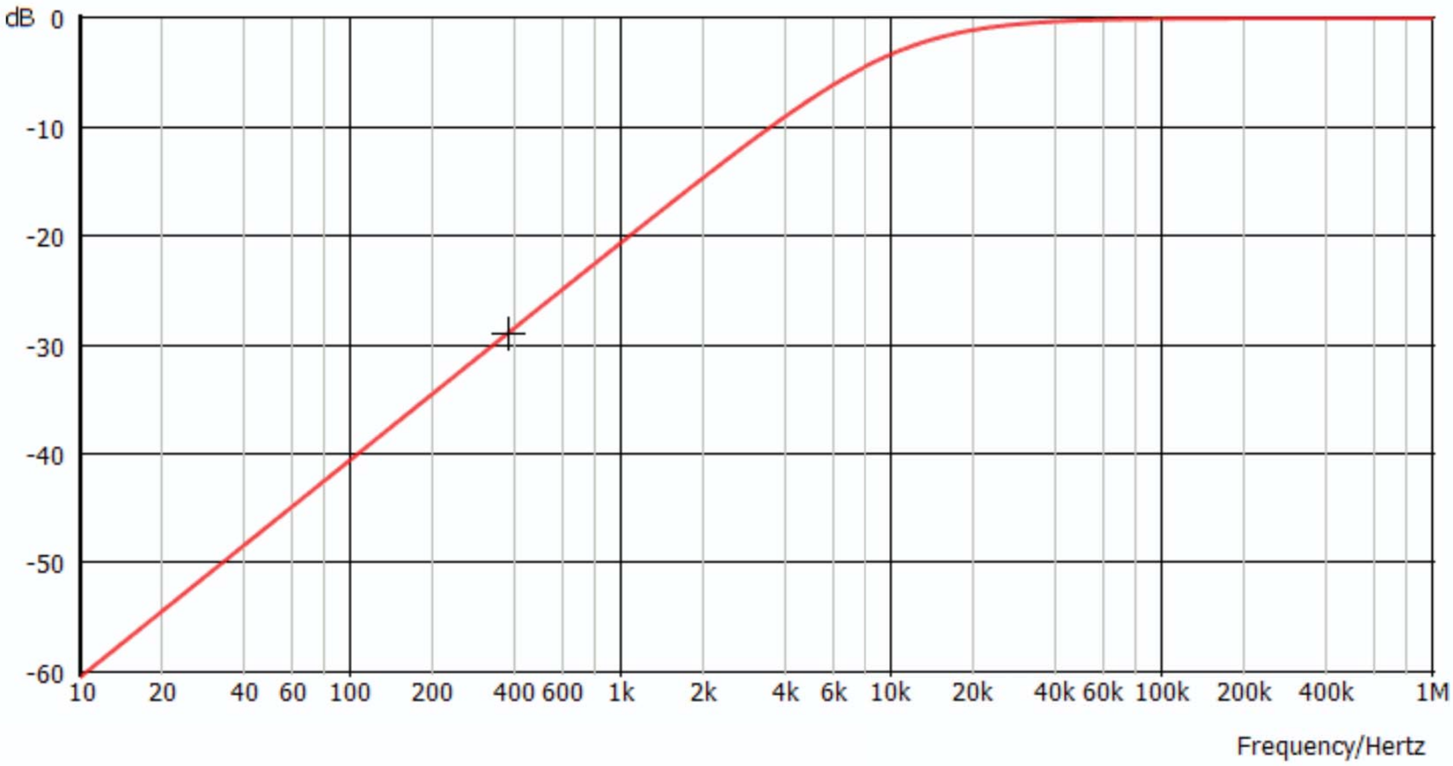
## 2) Ascisse e ordinate logaritmiche

Nel caso in cui anche sull'asse 'X' si dovessero rappresentare numeri molto distanti tra loro, allora si può rappresentare in modo logaritmico anche questo asse. Si crea così la cosiddetta "carta semilogaritmica" in cui:

- le ascisse sono in scala logaritmica; nel mondo delle TLC di solito si tratta di frequenze; non è possibile fare i dB sull'asse dei tempi, quindi viene semplicemente modificato il grafico.
- le ordinate sono in scala lineare ma con i valori in dB (quindi in realtà anche questo asse è logaritmico); nel mondo delle TLC di solito si tratta di potenze, tensioni, guadagni o attenuazioni.



Esempio: risposta in frequenza di un filtro




Il diagramma mostra come vengono modificati i segnali alle varie frequenze nel passsggio attraverso il filtro. La carta semilogaritmica permette di visualizzare il comportamento da 10 Hz a 1 milione di Hz (1 MHz).